# 動的破壊の連続体モデルとその安定性

九州大学 理学部　中西 秀[1]

## 1　直線破壊の動的不安定性

動的破壊の安定性の問題は、Fineberg らの良くコントロールされた実験 [1] 以来、物理の分野での興味を引き起こしてきた。

彼らは、高分子 (PMMA) の板の上下の辺を引っ張り、あらかじめ横の辺に入れておいた切れ込みから進展する一本の高速き裂の進展速度を精密に測定した [1]。その結果、き裂の伝播速度が低速の時には古典的弾性体力学で予想される速さで伝播するが、伝播速度がレイリー速度の約 40%を超えると伝播速度が時間的に激しく振動することを見出した。また破断面を観察すると、低速時に割れた部分は滑らかなのに対して、高速で伝播速度が激しく振動していたところではミクロンのオーダーでラフになっており、またき裂に多くの側枝が生じていることも観察された [3]。同様の現象は珪酸ガラス [2] でも見出され、物質によらず一般的に見られる破壊現象の動的不安定性に起因する現象と結論づけられた。

更に、動的な応力拡大係数と伝播速度の関係から導かれた破壊エネルギーの解析から、振動領域での余剰の破壊エネルギーがき裂の側枝から来ること、振動部分の伝播速度の上限が古典的弾性体論による結果と一致すること、なども示された [4, 5]。この結果は、ランダムな伝播速度の揺らぎは側枝による余剰な表面エネルギーの消費の為で、伝播速度の上限は側枝がたまたまないところで与えられると解釈でき、その意味では破壊の連続体理論は有効であることが結論づけられた。

このような動的不安定現象は、通常 Yoffe による運動学的理論解析 [7] により解釈されている。即ち、進展き裂先端付近での応力の発散成分の最大方向が、き裂速度がレイリー速度の約 60%を超えたところで直進方向から約 60 度それた方向になることから、直線き裂進展が不安定化すると説明されている (Yoffe 不安定性)。

しかし我々は、Yoffe 不安定性による解釈は以下の 2 つの理由から不十分と考えた。即ち、1) 物質中の実際の応力ではなくき裂先端での発散成分のみを問題にしている。2) き裂が直進した場合の応力の解析であって、外から与えたストレスに対してき裂がどう進展するかを計算したものではない。

そこで我々は、連続体モデルの範囲内で半現象論的でまた単純ではあるが物理的に閉じたモデルを、数学的になるべく系統的に解析し、その結果をもとに動的破壊の安定性の解釈を試みる [12, 13, 14, 16]。

[1] E-mail: naka4scp@mbox.nc.kyushu-u.ac.jp

## 2 連続体モデルとき裂の直線伝播解

解析したモデルは、2次元弾性体の中を $x$ 軸に沿って負の方向に走る一本のモードIき裂である。弾性体は $x$ 軸方向には無限に伸び、$y$ 軸方向には $\pm W$ の幅で上下端を外部ストレス $\Sigma_{N\infty}$ で引っ張るとする。同時に左右の無限遠では $\Sigma_{T\infty}$ のストレスがかかっているとする。き裂先端での非物理的なストレスの発散を押える為に、き裂先端部に凝集力を仮定する。これは、物理的にはき裂先端で破断する分子間力などから来る力を想定し、その形としてはBarenblatt[9, 10]やDugdale[8]によるもっとも簡単な矩形型のものを用いた。ただし、直線からずれたき裂伝播の場合の為に、凝集ストレスのき裂面に対し接線方向の成分も仮定し、凝集ストレスの方向としては破断面がもともと結合していた方向を仮定した(中心力)。

このモデルにおけるき裂の直線進行解は、Wiener-Hopf法を用いて閉じた形に書き下すことができる[12, 13]。与えられた外部ストレスに対するき裂の伝播速度は、き裂先端でのストレスが発散しないという条件を課することによって、決定される。この解からきまるき裂の進展の為の外部ストレスのしきい値は、弾性エネルギーと破壊表面エネルギーのバランスによって決まっている、いわゆるGriffithのしきい値[6]に一致する。外部ストレスがGriffithのしきい値を超えた時、何も散逸機構を仮定しないと、伝播速度は直ちにレイリー速度に達する。破断面表面付近の"軋み"による粘性型の散逸項を仮定すると、Griffithしきい値よりも大きい実効しきい値までき裂は極めてゆっくりと進行し、実効しきい値を超えるとレイリー速度付近まで急激に速くなることが示される[12]。この実効しきい値は散逸の強さによって決まっており、Griffithしきい値の数倍になり得る。

また、この解を解析することにより、2次元弾性体中の直線き裂の進行線に沿ったストレスはき裂先端部分での微視的なモデルに依存しない一般的な形をしていることが示される[14]。即ち、き裂線上のストレスの比 $\sigma_{xx}/\sigma_{yy}$ は"普遍的"な形をしており、これはき裂進行速度がゼロでない限りいつも1よりも大きい。言葉を変えると、直線進展き裂はいつも問題を抱えているといえる。このことと先に述べたYoffeの解析との違いは、Yoffeのはき裂先端部のストレスの発散成分に対するものであったのに対し、今の結果はき裂線上の任意の点での実際のストレスの値に関するものである。

このような考察から、2次元弾性体を伝播するモードIき裂の直線進行解の安定性が疑われるので、以下に解の安定性を調べてみる。

## 3 モードI直線進行解の線形安定性

解の安定性を調べる為に、$x$ 軸に沿って外部から

$$\varepsilon_{xy}(x) = \hat{\epsilon}_m e^{imx} \tag{1}$$

で与えられる波数 $m$ のずり応力を与えて、直線き裂がどのように応答するかを線形の範囲で調べる。この外部応力は、物理的には媒質中の不純物などによるひずみから来るものと見ることができる。

それに応答するき裂の軌跡を

$$y(X) = \hat{Y}_m e^{imx} \tag{2}$$

として、線形応答係数 $\hat{\chi}_Y(m,v)$,

$$\hat{Y}_m = \hat{\chi}_Y(m,v)\hat{\varepsilon}_m, \tag{3}$$

を計算する。ただし、$v$ はき裂の伝播速度で、横波の音速 $v_t$ を 1 とする単位系を用いる。直線き裂解の場合と同様に、ストレスがき裂先端で発散しないという条件を課すことで方程式は閉じる。

外部ストレスに対する一次摂動の方程式を詳細に解析することにより、以下のような問題点が明らかになった [16]。

### 3.1 一次摂動の近似的な取り扱い

き裂先端部の凝集ストレスの働いている領域内での変位の垂直成分 $U_N(x)$ は、$x \sim 0$ では $U_N \sim x^{3/2}$ のように増加する。ずりストレスをかけると、変位の接線成分 $U_S(x)$ が一次のオーダーででてくるが、それも $x \sim 0$ で $U_S \sim x^{3/2}$ の解があることを示すことができる。そこで、$U_S(x)/U_N(x) \equiv A(x)$ が凝集ストレス領域では一定で $x$ に依存しない、即ち $A(x) = A_0$（定数）という近似の範囲で、一次摂動の方程式を解くと、$\hat{\chi}_Y$ の表式が得られ、$m\ell \ll 1, v \ll 1$ のときに、

$$-\frac{1}{im\hat{\chi}_Y(m,v)} = \Delta\varepsilon_\infty + \sqrt{-im}\frac{K}{2\sqrt{2}}\frac{(1-1/\kappa)(v^2/2) + i(1/2)m\ell - \rho}{(1-1/\kappa)(v^2/2) - im\ell - \rho} \tag{4}$$

となることが示される。ただし、$K$ はき裂が止まっている時の応力拡大係数、$\ell$ は凝集力領域の長さ、$\kappa$ は縦波と横波の音速の比の 2 乗 $(v_\ell/v_t)^2$、$\rho$ は凝集力の中心力からのずれを表すパラメタ ($\rho > 0$ の時力の接線成分が中心力より強いとする。) である。また、$\Delta\varepsilon_\infty \equiv \Sigma_{N\infty} - \Sigma_{T\infty}$ で、これは今の設定では、Cotterell と Rice らによって導入された $T$ ストレスに一致する [11, 15]。

この表式から以下のようなことが分かる。

まず、$K \sim \sqrt{W}\Sigma_{N\infty}$ なので、$W$ が十分大きければ第一項は第二項に比べて無視できる。その時、固有モードを表す複素 $m$ 平面内の $\hat{\chi}_Y$ のポール $m^*$ は、

$$m^*\ell \approx i\left(-2\rho + (1-1/\kappa)v^2\right) \tag{5}$$

とで与えられる。$m^*$ の虚部が正である時、振動は指数関数的に成長し、系がそのような不安定性を持っていることを示す。(き裂は $-x$ 方向に進むとした為。)

このポールの位置から、直線進行解の安定性は、凝集ストレスを特徴づける微視的なパラメータ $\rho$ に依存していることが分かる。即ち、凝集ストレスの接線成分が垂直成分より弱く $\rho < 0$ であれば、直線進行解は $v > 0$ に対していつも指数関数的な不安定性を示す。一方、$\rho > 0$ で凝集ストレスの接線成分の方が強い場合には、ある臨界速度 $v_c$ があって $v$ がそれより小さい時には直線進行き裂が安定、大きい時には不安定、即ち

$$\begin{cases} 0 < v < v_c \equiv \sqrt{\frac{2\rho}{1-1/\kappa}} & \text{安定} \\ v_c < v & \text{不安定} \end{cases} \tag{6}$$

となる。この場合には、高速で動的不安定性を示している実験結果と定性的に一致しているように見えるが、臨界速度 $v_c$ が微視的なパラメータ $\rho$ に依存している点が問題である。

この表式で $v \to 0$ をとると、$\rho > 0$ の場合には Cotterell と Rice による準静的な計算 [11] と一致することも示すことができる [15]。すなわち、この場合には $T < 0$ の場合には直線進行き裂が安定であるが、$T > 0$ となるとき裂が

$$y(x) \propto \exp\left[-\left(\frac{T}{K}\right)^2 x\right] \tag{7}$$

のようにそれてゆく。Cotterell と Rice らの計算は、き裂先端部での凝集力領域を無視しているので、我々の結果に基づいて彼らの結果を解釈すると、き裂伝播に凝集力の微視的性質に起因する不安定性がない場合には、直線き裂の不安定性は巨視的なストレス場によって決まっており、それは $T$ ストレスによって判定される、ということになる。

### 3.2 一次摂動の完全な取り扱い

しかしながら、上で用いた $A(x) = A_0$ ような近似を用いずに一次摂動の表式を詳しく解析すると、連続体モデルそのものに起因すると思われる問題が明らかになる。

小さな $v$ と $m$ に対して、一次摂動の方程式は凝集力領域での破断面の変位の接線成分と垂直成分の比 $A(x) \equiv U_S(x)/U_N(x)$ に対する方程式

$$\zeta(x)A(x) - (1-\nu)\int_0^1 dyZ(x,y)A(y) - im\int_0^1 dyM(x,y)A(y) = -imx^{3/2} \tag{8}$$

を解くことに帰着する [16]。ただし、

$$\begin{aligned}
Z(x,y) &\equiv 2\sqrt{\frac{x}{y}} - \ln\left|\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}\right| \\
\zeta(x) &\equiv \int_0^1 dyZ(x,y) \\
M(x,y) &\equiv 2\sqrt{xy} - \frac{2}{3}x\sqrt{\frac{x}{y}} + (x-y)\ln\left|\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}\right| \\
\nu &\equiv \left(1-\frac{1}{\kappa}\right)\frac{v^2}{2}
\end{aligned}$$

である。

この特異積分方程式 (8) を数値的に解析した結果、左辺の積分演算子に対して非自明なゼロ固有関数が存在し、それがストレスが発散しないなどの物理的条件では排除できないことが分かった [16]。また、このゼロ固有関数の存在は左辺の特異積分に起因するかなり一般的なもので、例えば、き裂面の表面散逸散逸を与えるようにモデルを拡張してもなくならない。

これを文字通り解釈すると、外から与えた摂動に対して応答が一意的に決まらないことになり、それらの解の差は、摂動が加えられない場合の直線伝播からのずれが有限の解をあたえる。つまり、連続体モデルを凝集力領域内部までフルに取り扱うと、少なくとも一次摂動の範囲内では直線き裂伝播解がいつも不安定になってしまう。

Lobkovsky と Langer らはこのモデルを拡張し、凝集領域での散逸項を入れるた場合についても詳細な解析を行なった [16]。その結果、彼らはある凝集力の形に対してはストレスが発散しないという条件が解を一意的に決めることを示した。しかし、解の性質が凝集領域のモデルの詳細に依存する、即ち、モデルの数学的振舞が凝集力を特徴づける少数の物理的なパラメタで記述できない為、この凝集力モデルはき裂の進展の安定性を記述する半現象論モデルとしては不適格と結論づけた。

## 4 まとめ

き裂の進展のダイナミクスを調べるもっとも単純なモデルとして、Barenblatt-Dugdale による凝集力モデルがしばしば用いられる。このモデルによる直線進行解はかなり一般的な凝集力に対して、コンパクトな形に書き表すことができ、物理的にももっともな振舞をすることが分かった。

その直線進行解の線形安定性を調べると、凝集領域内での自由度を制限した範囲内では不自然でない結果を導き、特にミクロな不安定性がない場合には、準静的な極限で Cotterell と Rice の結果に帰着する。

しかし、凝集領域での空間自由度をフルに取り扱うと、物理的に解釈できない結果を導く。即ち、多くの凝集力に対して解が一意的に決定できないか、凝集力モデルの微視的な特徴に解の性質が大きく依存する為に、このモデルが凝集領域での物理プロセスを半現象論的に表すモデルとしては有効でない。

Barenblatt-Dugdale 型の凝集力モデルで十分表現できていない物理的特徴としては、物質の不連続性、塑性変形、転移のダイナミクス、3 次元性などが考えられるが、これらのうち何がもっとも重要な要素かは今後の重要な課題である。

## 参考文献


[1] J. Fineberg, S.P. Gross, M. Marder, and H.L. Swinney, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 457; Phys. Rev. B **45** (1992) 5146.

[2] S.P. Gross, J. Fineberg, M. Marder, W. D. McCormick, and H.L. Swinney, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3162.

[3] E. Sharon, S.P. Gross, and J. Fineberg, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 5096.

[4] E. Sharon, S.P. Gross, and J. Fineberg, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 2117.

[5] E. Sharon and J. Fineberg, Nature **397** (1999) 333.

[6] A.A. Griffith, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A **221** (1920) 163.

[7] E.H. Yoffe, Philos. Mag. **42** (1951) 739.

[8] D.S. Dugdale, J. Mech. Phys. Solids **8** (1960) 100.

[9] G.I. Barenblatt, Appl. Math. Mech. **23** (1959) 622.

[10] G.I. Barenblatt, Adv. Appl. Mech. **7** (1962) 56.

[11] B. Cotterell and J.R. Rice, Int. J. Fract. **16** (1980) 155.

[12] J.S.Langer and H.Nakanishi, Phys. Rev. E **48** (1993) 439.

[13] E.S.C. Ching, Phys. Rev. E **49** (1994) 3382.

[14] E.S.C. Ching, J.S. Langer, and H. Nakanishi, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 1087; Phys. Rev. E **53** (1996) 2864.

[15] H. Nakanishi, Phys. Rev. E **54** (1996) R4564.

[16] A. Lobkovsky and J.S. Langer, J. Mech. Phys. Solids, **46** (1998) 1521.